Benoît Rittaud

La Géométrie classique

objets et transformations

Quatre à Quatre

Éditions Le Pommier

Benoît Rittaud

La Géométrie classique

objets et transformations

à Quatre
Quatre

Éditions
Le Pommier

BENOÎT RITTAUD

Agrégé de mathématiques, il est maître de conférences à l'université Paris-XIII. Il collabore à la revue *Tangente*, de culture et de vulgarisation des mathématiques.

Je tiens à remercier les personnes qui, par leurs conseils avisés et leurs encouragements, m'ont aidé dans la rédaction de ce livre. Mes pensées vont à Valérie Laurent, qui a eu la patience de relire de nombreuses fois les épreuves et y a apporté beaucoup. Merci également à Miguel Degoulet et à Christophe Juillot, qui ont su me donner de précieuses suggestions.

ISBN 2-7465-0037-X

Les mathématiques dans « Quatre à Quatre » première année

Après la philosophie et les sciences du vivant, « Quatre à Quatre » vous propose un nouveau défi : comprendre les mathématiques. Ce défi est de taille, car nous sommes nombreux à éprouver face aux mathématiques une peur enfantine de l'échec s'exprimant par un mystérieux « blocage » à l'égard de tout ce qui a trait à cette discipline. Or, nous savons tous que le blocage en question n'émane pas d'une limitation de nos compétences intellectuelles.

Ces livres ont pour mission première de vous familiariser à nouveau avec une discipline fascinante tout autant par sa créativité que par sa rigueur. Ils s'adressent principalement aux adultes, seuls capables de maîtriser un concept abstrait, susceptible d'engendrer une infinité de questions d'ordre épistémologique, méthodologique, voire métaphysique.

Quatre livres vous sont proposés cette année. Ils constituent tous une introduction, aussi élémentaire que possible, au monde des mathématiques :

Qu'est-ce que les mathématiques ?
La Géométrie classique : objets et transformations
Le Monde des nombres
La Logique ou l'art de raisonner

Chacun de ces livres peut, bien entendu, être lu indépendamment des autres. Mais l'ensemble des quatre titres peut être considéré comme un tout. D'ailleurs, certains thèmes sont présents dans deux ou trois ouvrages : il ne s'agit point de redondances, mais bien de différences de perspective. Notre conseil est, dans tous les cas, de les lire dans l'ordre mentionné plus haut. Cet ordre définit une double hiérarchie : une généralité décroissante et une difficulté croissante.

Qu'est-ce que les mathématiques ? donne une vision générale et panoramique des disciplines mathématiques, mais aussi des problèmes que rencontrent les hommes (et les femmes) qui les font. *La Géométrie classique* est une introduction à la géométrie qui permet de *re*faire connaissance avec celle des Anciens, et de s'approcher un peu de celle des Modernes. *Le Monde des nombres* constitue une introduction aux différents types de nombres, ainsi qu'aux manières de les utiliser et de les justifier mathématiquement. Enfin, dans *La Logique ou l'Art de raisonner*, le lecteur pourra se familiariser – d'une manière graduelle – avec les fondements formels et symboliques de la logique moderne.

Ces livres constituent une véritable initiation aux mathématiques, et l'usage du papier et du crayon (pour les calculs), la mémorisation des symboles (pour la logique), parfois même une nouvelle lecture peuvent être particulièrement utiles à qui souhaite prendre au sérieux cet apprentissage d'un nouveau genre. Comme toujours, bibliographie, glossaire et index sont là pour vous apporter aide et assistance.

Bonne lecture !

Sommaire

Avant-propos

« Science de toutes les espèces d'espace » selon Kant, la géométrie est, à l'origine, l'étude des propriétés et des relations entre diverses figures composées de droites, de triangles, de cercles, etc. Cette géométrie donne un cadre simple à l'intérieur duquel il est possible de mettre en valeur toute la richesse d'une définition, d'un raisonnement ou d'un théorème mathématique.

S'il existe une quantité potentiellement infinie de questions à se poser à partir d'une situation géométrique élémentaire (le triangle, pour ne citer que lui, est une mine de problèmes, qui vont de la localisation de son centre de gravité au cercle d'Euler, en passant par la droite de Simpson), la géométrie a toutefois profondément changé depuis ses origines, et son évolution ne se résume pas à un simple progrès dans la compréhension de ses objets fondamentaux sur lesquels, avec les siècles, on sait dire de plus en plus de choses : la mutation de la géométrie vient surtout d'un changement de perspective qui a vu les figures perdre leur rôle central au profit des transformations.

Le présent ouvrage se décompose en cinq parties. Le premier chapitre introduit les acteurs de base de la géométrie, comme les points et les droites. Il est construit de façon à contenir aussi peu de difficultés mathématiques que possible : son objectif est surtout de mettre en place quelques principes fondamentaux, comme le postulat des parallèles ou la question de l'égalité géométrique.

Le chapitre II s'intéresse aux objets « classiques » de la géométrie (angles, triangles, cercles...). Nous avons tenté, pour chaque notion et pour chaque résultat, de donner une application concrète ou, au moins, une vision intuitive « parlante ». Ce chapitre contient plusieurs démonstrations : certains lecteurs trouveront peut-être inutiles certaines d'entre elles, en ce qu'elles nécessitent parfois des détours et des efforts pour obtenir une preuve logique qui peut sembler moins convaincante qu'une simple figure. C'est là une subtile difficulté des mathématiques : le raisonnement qui permet d'aboutir à une certitude est parfois plus tortueux que l'intuition du résultat, et ne l'éclaire pas toujours dès la première lecture.

Le troisième chapitre concerne les théorèmes de Thalès et de Pythagore, exposés, démontrés et appliqués à certaines situations.

Au chapitre IV, nous entamons l'étude des transformations (rotations, translations...), qui constituent un concept clé de la géométrie. Là encore, nous avons tenté, au travers d'exemples tirés de différents contextes, d'indiquer en quoi les transformations peuvent être utiles, dans des situations variées.

Le dernier chapitre constitue une ouverture sur d'autres façons de faire de la géométrie. Toujours bien vivantes aujourd'hui, les mathématiques se déploient dans des directions encore nouvelles, et constituent une œuvre éternellement en mouvement.

Chapitre I

Premiers éléments

Pour donner une analogie un peu simpliste avec le spectacle, une discipline comme la géométrie se développe à partir d'un contexte et de protagonistes (les objets mathématiques) ; la trame, jamais achevée, est constituée des relations qu'entretiennent entre eux ces différents personnages.

Le théâtre de la géométrie se joue traditionnellement sur deux scènes différentes. La première est celle où tous les objets se situent dans un même plan fixé au départ, comme celui de la feuille : on parle alors de géométrie *plane*. L'autre scène est celle de l'*espace* : bien que de portée plus générale, et même si dans l'espace deux droites peuvent n'être ni sécantes ni parallèles, la manière de raisonner est la même. Dans cet ouvrage, nous nous placerons en général dans le cadre de la géométrie plane.

Le point, atome de la géométrie

Le premier acteur de la géométrie est le POINT, qui en est l'objet *élémentaire*, ce dernier terme étant pris dans son sens de « composant de base ». Pour le géomètre grec Euclide, « un point est ce dont il n'y a aucune partie » (notons le singulier). C'est un *atome*, au sens étymologique d'« objet insécable ». Cette définition – négative – n'en est pas une à proprement parler, puisqu'elle se réfère à la notion de partie, elle-même non définie. Il faut dire que ce premier acteur n'est pas simple à cerner : il incarne un objet qui ne possède aucune structure, abstraction dans une certaine mesure comparable au zéro, l'analogie n'étant toutefois que partielle, le zéro étant, lui, l'expression d'un *non-être*.

Alors, comment commencer ? Toute définition fait nécessairement référence à des concepts antérieurs et, puisqu'il n'est pas possible de poursuivre ainsi indéfiniment, on est obligé d'accepter que les notions premières se réfèrent à des concepts eux-mêmes mal définis. Cet échec apparent, problématique quand on s'intéresse aux questions plus philosophiques des fondements des mathématiques, ne doit pourtant pas faire oublier que bien des objets mathématiques ont pu être correctement manipulés avant d'avoir reçu de définition précise.

En ce qui nous concerne, nous utiliserons le point comme l'ont toujours utilisé les géomètres : à partir de notre perception usuelle. Le point est à l'espace ce que l'instant est à la durée : on peut l'imaginer mais pas le matérialiser ; c'est peut-être un pur produit de l'imagination, qui apaise notre esprit en nous donnant à croire en cette ultime poupée russe qui ne s'ouvre pas sur une poupée plus petite.

La droite ou l'irruption du continu

On appelle généralement DROITE toute ligne prolongée indéfiniment des deux côtés de façon rectiligne. Parler rigoureusement de la structure et des propriétés qui définissent une droite étant long et délicat, nous n'en donnons ici qu'une brève description.

L'une des caractéristiques essentielles d'une droite est d'être un *continu*. Cette notion rend compte du fait qu'une droite est « sans trou » ; cette propriété est plus forte, plus contraignante que celle qui dit qu'« entre deux points d'une droite, il y en a toujours un troisième ». C'est la continuité qui assure que deux points situés de part et d'autre d'une droite ne peuvent être joints sans la couper (en géométrie plane). Bien que nous ayons tous une perception intuitive nous permettant souvent de raisonner de manière à peu près correcte sur la continuité, l'analyse de cette notion est difficile.

La continuité ne suffit pas à caractériser une droite : un segment, un cercle ou une courbe sont eux aussi des continus. Ce qui distingue géométriquement une droite est son caractère *géodésique*, en vertu duquel dans un plan, la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Pour cette dernière définition, nous utilisons implicitement le concept de *distance*, sur lequel nous aurons à revenir.

Alignement

Deux points sont toujours alignés : il existe obligatoirement une droite les contenant tous les deux. Mais peut-il y en avoir une seconde ? La réponse est oui lorsque les deux points sont confondus (et dans ce cas, il y en a même une infinité). En revanche, lorsque les deux points sont distincts, nous postulerons qu'il n'y a qu'une seule droite qui les contient : cette affirmation, dont la véracité ne semble pas poser question, provient du *postulat des parallèles* (*cf.* p. 18).

Trois points ne sont pas toujours alignés : si l'on assimile le Soleil, la Terre et la Lune à trois points, supposer qu'ils sont alignés revient à dire qu'on est dans une situation d'éclipse de Lune ou de Soleil, suivant l'ordre des points. Or tel n'est pas toujours le cas.

Prenons un instant le point de vue de la géométrie spatiale. Si trois points ne sont pas systématiquement alignés, ils sont en revanche toujours *coplanaires*, c'est-à-dire qu'il existe un PLAN les contenant tous les trois. On peut se contenter, pour la notion de plan, de l'analogie avec une feuille de papier sans épaisseur, prolongée indéfiniment dans toutes ses directions, mais on peut aussi donner une définition rigoureuse à l'aide de la propriété suivante : un plan contenant deux points contient toute la droite qui les porte. (Cette propriété est utilisée par les ajusteurs pour contrôler si une surface donnée est plane ou non.)

Exprimons pour trois points non alignés et un plan l'équivalent de l'énoncé donné pour deux points non confondus et une droite : par trois points non alignés passe un plan et un seul. C'est ainsi qu'un trépied peut s'équilibrer sur n'importe quelle surface, alors qu'une table à quatre pieds est souvent légèrement branlante.

Deux points étant fixés, la portion de droite située entre les points est appelée SEGMENT. La droite qui la contient est la droite *portante*. Une DEMI-DROITE est une droite limitée d'un côté par un point qui en constitue l'*extrémité.*

DROITES ENTRE ELLES

En géométrie plane, dessiner deux droites peut produire trois configurations bien connues. Le premier cas, que l'on rencontre le plus souvent, est celui de droites SÉCANTES. Elles se coupent en un unique *point d'intersection.*

Le deuxième cas est celui de deux droites PARALLÈLES, sans point commun (elles sont *disjointes*). Le dernier cas est celui où les droites sont les mêmes (elles sont *confondues*). On peut considérer que des droites confondues sont parallèles, ou leur refuser ce statut en imposant à toutes droites parallèles d'être disjointes, c'est une question de convention. Dans la pratique, suivant les énoncés que l'on veut donner, on choisit la convention qui permet la formulation la plus élégante (nous illustrerons cela p. 18).

La disjonction n'est pas la « vraie » définition du parallélisme (même s'il est toujours possible de confondre ces deux notions en géométrie plane). Dans l'espace, une telle définition impliquerait de considérer comme parallèles n'importe quelles droites non sécantes, comme par exemple sur un terrain de football l'un des poteaux (verticaux) d'un but et la barre transversale (horizontale) de l'autre but. Par ailleurs, il est des contextes où ce qu'on appelle des parallèles peuvent se rencontrer, comme en géométrie sphérique (*cf.* chap. V).

En géométrie spatiale, on peut dire que deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont disjointes *et* qu'il existe un plan les contenant toutes les deux, ce qui revient à poser que deux droites parallèles sont deux droites ayant même direction, tels deux rails de chemin de fer.

Le postulat des parallèles

« Une droite et un point étant fixés, il existe une droite et une seule passant par ce point et parallèle à la droite. » Cet énoncé est l'une des versions du célèbre *postulat des parallèles*, ou postulat d'Euclide. Euclide avait utilisé une formulation différente ; celle que nous donnons est appelée *axiome de Playfair*. Ici, deux droites confondues sont considérées comme parallèles : si tel n'était pas le cas, il faudrait supposer le point hors de la droite pour que l'énoncé reste correct.

Pendant des siècles, on a pensé pouvoir *démontrer* le postulat des parallèles. Toutes les tentatives ont pourtant échoué car, malgré le caractère de pure évidence de l'énoncé, il n'est possible ni de le démontrer ni de démontrer son contraire, ce qui signifie que l'on peut le considérer comme vrai… ou faux. Ce second point de vue, assez étrange, a permis de fonder de nouvelles géométries, plus exotiques que celle à laquelle nous sommes accoutumés (*cf.* chap. V).

Pour notre part, nous nous intéresserons à la *géométrie euclidienne*, à savoir celle qui accepte le postulat d'Euclide et constitue la géométrie la plus naturelle à l'échelle humaine.

La question de l'égalité

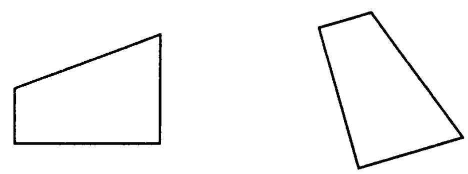
Deux droites, même non confondues, ont une propriété de « ressemblance » qui fait qu'on est tenté de les considérer comme équivalentes : il n'y en a pas une « plus grande » que l'autre, ou dirigée dans une direction privilégiée.

L'intérêt de disposer de deux objets équivalents réside en partie dans le fait qu'étudier l'un dispense d'étudier l'autre : ainsi, pour connaître les propriétés géométriques des droites, il suffit d'en observer une seule. Il en va de même pour les plans ; c'est ainsi que la géométrie plane est la géométrie *du plan* plutôt que celle *d'un plan*.

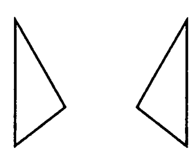
Mettons toutefois l'accent sur une chose : l'équivalence entre deux objets (des droites, par exemple) est toujours subordonnée à un contexte. C'est ainsi que deux droites ne pourront être considérées comme équivalentes que parce que nous nous placerons dans le cadre de la géométrie plane ou spatiale. Pour reprendre l'exemple précédent, dans le cadre de l'astronomie mathématique, une droite orientée nord-sud et une droite orientée est-ouest ne peuvent plus être considérées comme équivalentes.

En réalité, deux choses n'en font qu'une seulement lorsqu'elles sont équivalentes dans tout contexte (lorsqu'il n'y a pas moyen de les distinguer l'une de l'autre). L'équivalence des figures dans le contexte de la géométrie plane est appelée ÉGALITÉ.

Nous dirons, de façon intuitive, que deux figures géométriques (segments, droites ou autres) sont *égales* lorsqu'il est possible de faire glisser l'une sur l'autre de façon à ce qu'elles se recouvrent exactement. Ainsi des figures suivantes.



Soulevons pour commencer la question de la terminologie. Il faut avoir à l'esprit que l'égalité n'est pas l'identité. Le fait que les hommes soient égaux ne signifie pas qu'ils soient tous une seule et même personne : de la même façon, deux figures égales peuvent être distinctes. On rencontre parfois les termes de figures « superposables », ou encore « isométriques », pour exprimer la notion d'égalité géométrique. « Superposable » renvoie au concept de « poser dessus », qui nécessite dans sa réalisation matérielle une troisième dimension. « Isométrique » concerne la préservation des longueurs des parties définissant une figure. Pour nous, il s'agit de « faire glisser », opération purement bidimensionnelle qui interdit les retournements.



Les deux figures ci-dessus, que l'on peut retourner l'une sur l'autre pour les faire coïncider, sont dites SYMÉTRIQUES. On peut, comme certains ouvrages le font, décider que deux figures symétriques sont égales (au sens